HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 – THÁI BÌNH

Bài 1:

$$A = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} - \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} = \sqrt{5}-2-\sqrt{5}-2 = -4.$$

a. (1 đ)

Với $x \geq 0$, $x \neq 16$, thì:

$$B = \frac{2(x+4)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4} = \frac{2x+8+\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)-8(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)}$$

$$= \frac{2x+8+x-4\sqrt{x}-8\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} = \frac{3x-12\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy $B = \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$, $x \neq 16$.

b. (0,5 đ)

Dễ thấy $B \geq 0$ (vì $\sqrt{x} \geq 0$).

Lại có: $B = 3 - \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} < 3$ (vì $\dfrac{3}{\sqrt{x}+1} > 0\ \forall x \geq 0,\ x \neq 16$).

Suy ra: $0 \leq B < 3 \Rightarrow B \in \{0; 1; 2\}$ (vì $B \in Z$).

- Với $B = 0 \Rightarrow x = 0$;
- Với $B = 1 \Rightarrow \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.
- Với $B = 2 \Rightarrow \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2(\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy để $B \in Z$ thì $x \in \{0; \dfrac{1}{4}; 4\}$.

Bài 2:

$m = 2$, phương trình đã cho thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Phương trình này có $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên có hai nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Vậy với m = 2 thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ ac < 0 $\Leftrightarrow$ m + 1 < 0 $\Leftrightarrow$ m < -1.

Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m+1 \end{cases}$.

Xét hiệu: $|x_1| - |x_2| = -x_1 - x_2 = -4 < 0$ (vì $x_1 < 0 < x_2$) $\Rightarrow |x_1| < |x_2|$.

Vậy nghiệm x_1 có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn nghiệm x_2.

Bài 3:

(d) cắt (P) tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow$ Phương trình hoành độ của (d) và (P):

$$-x^2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 + mx + 2 = 0 \text{ có nghiệm duy nhất.}$$

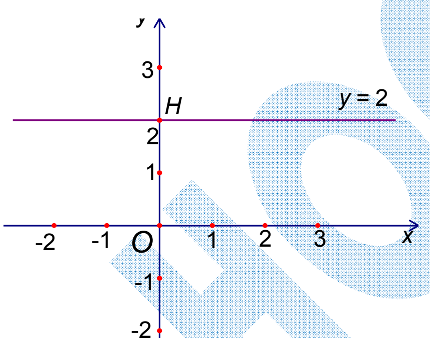
$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\, 2\sqrt{2}.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \pm\, 2\sqrt{2}$.

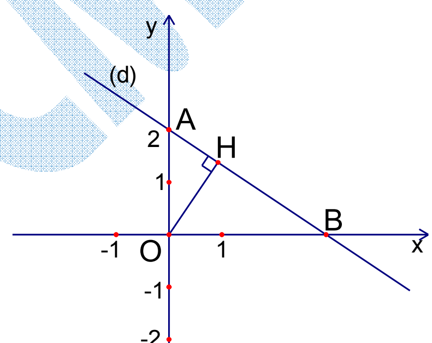
$\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -(-2)^2 \\ n = m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = -2 \end{cases}$

Vậy m = -4, n = -2.

- Nếu m = 0 thì (d) thành: y = 2 $\Rightarrow$ khoảng cách từ O đến (d) = 2 $\Rightarrow$ OH = 2 (Hình 1).



Hình 1



Hình 2

- Nếu m ≠ 0 thì (d) cắt trục tung tại điểm A(0; 2) và cắt trục hoành tại điểm $B(-\frac{2}{m};\ 0)$ (Hình 2).

$\Rightarrow$ OA = 2 và $OB = \left|-\frac{2}{m}\right| = \frac{2}{|m|}$.

ΔOAB vuông tại O có OH $\perp$ AB $\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{4} + \frac{m^2}{4} = \frac{m^2+1}{4}$

$\Rightarrow OH = \frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$. Vì $m^2 + 1 > 1\ \forall m \neq 0 \Rightarrow \sqrt{m^2+1} > 1 \Rightarrow OH < 2$.

So sánh hai trường hợp, ta có $OH_{max} = 2 \Leftrightarrow m = 0$.

Bài 4:

Vì $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^0 \Rightarrow$ bốn điểm A, B, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính AB.

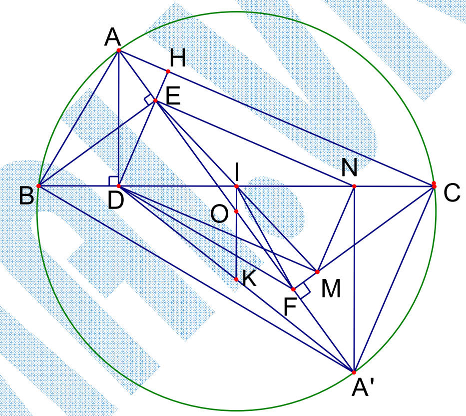
Xét ΔADB và ΔACA' có:

$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90^0$ ($\widehat{ACB} = 90^0$ vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$\widehat{ABD} = \widehat{AA'C}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \Delta ADB \sim \Delta ACA'$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{A'C} \Rightarrow$ BD.AC = AD.A'C (đpcm).



Gọi H là giao điểm của DE với AC.

Tứ giác AEDB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDC} = \widehat{BAE} = \widehat{BAA'}$.

$\widehat{BAA'}$ và $\widehat{BCA}$ là hai góc nội tiếp của (O) nên:

$\widehat{BAA'} = \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BA'}$; $\widehat{BCA} = \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BA}$.

$\Rightarrow \widehat{BAA'} + \widehat{BCA} = \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BA'} + \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BA} = \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{ABA'} = 90^0$ (do AA' là đường kính)

Suy ra: $\widehat{HDC} + \widehat{HCD} = \widehat{BAA'} + \widehat{BCA} = 90^0 \Rightarrow \Delta CHD$ vuông tại H.

Do đó: DE ⊥ AC.

Gọi I là trung điểm của BC, K là giao điểm của OI với DA', M là giao điểm của EI với CF, N là điểm đối xứng với D qua I.

Ta có: $OI \perp BC \Rightarrow OI // AD$ (vì cùng $\perp BC$) $\Rightarrow OK // AD$.

$\Delta ADA'$ có: OA = OA' (gt), OK // AD $\Rightarrow$ KD = KA'.

$\Delta DNA'$ có ID = IN, KD = KA' $\Rightarrow$ IK // NA'; mà $IK \perp BC$ (do $OI \perp BC$)

$\Rightarrow NA' \perp BC$.

Tứ giác BENA' có $\widehat{BEA'} = \widehat{BNA'} = 90^0$ nên nội tiếp được đường tròn

$\Rightarrow \widehat{EA'B} = \widehat{ENB}$.

Ta lại có: $\widehat{EA'B} = \widehat{AA'B} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB của (O)).

$\Rightarrow \widehat{ENB} = \widehat{ACB} \Rightarrow$ NE // AC (vì có hai góc ở vị trí đồng vị bằng nhau).

Mà $DE \perp AC$, nên $DE \perp EN$ (1)

Xét ΔIBE và ΔICM có:

$\widehat{EIB} = \widehat{CIM}$ (đối đỉnh)

IB = IC (cách dựng)

$\widehat{IBE} = \widehat{ICM}$ (so le trong, BE // CF (vì cùng $\perp$ AA'))

$\Rightarrow \Delta IBE = \Delta ICM$ (g.c.g) $\Rightarrow$ IE = IM

ΔEFM vuông tại F, IE = IM = IF.

Tứ giác DENM có IE = IM, ID = IN nên là hình bình hành (2)

Từ (1) và (3) suy ra DENM là hình chữ nhật $\Rightarrow$ IE = ID = IN = IM

$\Rightarrow$ ID = IE = IF. Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF.

I là trung điểm của BC nên I cố định.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Bài 5:

Từ (2) suy ra $x + 2y \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$2(x^2 + 4y^2) = (1^2 + 1^2)[x^2 + (2y)^2] \geq (x + 2y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+4y^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{(x+2y)^2}{4}} = \frac{x+2y}{2} \qquad (3)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y$.

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được: $\sqrt{\frac{x^2+2xy+4y^2}{3}} \geq \frac{x+2y}{2} \qquad (4)$

Thật vậy, $\sqrt{\frac{x^2+2xy+4y^2}{3}} \geq \frac{x+2y}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2+2xy+4y^2}{3} \geq \frac{(x+2y)^2}{4}$ (do cả hai vế đều ≥ 0)

$\Leftrightarrow 4(x^2+2xy+4y^2) \geq 3(x^2+4xy+4y^2) \Leftrightarrow (x-2y)^2 \geq 0$ (luôn đúng $\forall x, y$).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y$.

Từ (3) và (4) suy ra: $\sqrt{\frac{x^2+4y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+2xy+4y^2}{3}} \geq x+2y$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow x = 2y \geq 0$ (vì $x + 2y \geq 0$).

Khi đó, (1) trở thành: $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3+3x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } x^3+3x+1 \geq 1 > 0\ \forall x \geq 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x = 1; y = \frac{1}{2})$.

Nguồn: Hocmai.vn